III Congreso Iberoamericano de Cabri
IBEROCABRI - 2006

DOS EPISODIOS QUE PLASMAN RASGOS DE UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA EN LA QUE CABRI JUEGA UN PAPEL CLAVE

Patricia Perry, Carmen Samper, Leonor Camargo.

pperry@pedagogica.edu.co - csamper@pedagogica.edu.co - lcamargo@pedagogica.edu.co

Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

Los dos episodios de clase que se presentan y analizan en este artículo tuvieron lugar en un curso de geometría plana, ubicado en el segundo semestre de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Son propósitos centrales del curso desarrollar competencia demostrativa y contribuir a formar en los estudiantes una concepción de la demostración según la cual ésta es una actividad distintiva del quehacer matemático que es posible y deseable llevar a cabo en cualquier curso de matemáticas. Se busca alcanzar los propósitos mencionados conformando una comunidad de práctica cuya empresa común, primero es la reconstrucción de una parte del sistema axiomático elaborado por los autores del texto que se sigue en la clase, y luego, la construcción del sistema axiomático correspondiente para el tema de los cuadriláteros. Naturalmente, el papel de la profesora del curso, en calidad de experta local, es decisivo en la conformación de la comunidad de práctica. Sin embargo, Cabri como instrumento de mediación y comunicación juega también un papel determinante en dicha conformación. Ilustrar en qué consiste ese papel es lo que nos ocupa en este artículo.

1. INTRODUCCIÓN

En el campo de la educación, desde hace algún tiempo se han venido abriendo paso las perspectivas sociológicas y antropológicas del aprendizaje. Dentro de esta tendencia, algunos teóricos e investigadores en Educación Matemática han ido reconociendo que no es posible comprender y explicar a cabalidad la actividad matemática de los estudiantes atendiendo solamente a teorías individualistas —i.e., aquellas que tratan el aprendizaje matemático casi exclusivamente como un proceso de construcción individual— y se han ido interesando por las dimensiones social y cultural de la actividad matemática en la clase.

En ese contexto han surgido las teorías socioculturales del aprendizaje de las matemáticas que, basadas en los planteamientos de Vygotsky, sostienen que las dimensiones individuales de la experiencia son secundarias frente a las sociales y culturales y, en consecuencia, procuran explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes, enfocándose principalmente en la participación de ellos en prácticas socioculturales.

La interacción social se ve como el medio por el cual se transmiten de una generación a otra las formas matemáticas de conocer; en ese sentido, la interacción social, más que ser un catalizador que posibilita o dificulta el aprendizaje, es un factor determinante de éste[1].

Por ejemplo, desde una perspectiva sociocultural y haciendo eco a Lave y Wenger, Goos (2004, p. 259) afirma que "la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se conciben como actividades sociales y comunicativas que requieren la formación de una comunidad de práctica, en la que los estudiantes se apropien y usen los valores epistemológicos y las convenciones comunicativas de la comunidad matemática misma". Por su parte, Forman (1996, p. 117) afirma que entender el aprendizaje "como mayor participación en una comunidad de práctica […] implica que lo que importa para el aprendizaje no es la disponibilidad de recursos instruccionales tales como computadores, tamaño del grupo de estudiantes, textos ricos en contenido, y demás, sino el acceso a prácticas significativas en una comunidad". La responsabilidad principal del profesor es mediar directamente entre los significados personales de los estudiantes y los significados matemáticos establecidos culturalmente (Cobb, Jaworski, Presmeg, 1996).

Nuestro grupo de investigación ha asumido una perspectiva sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, razón por la cual estamos de acuerdo en que éste depende de y se refleja principalmente en el involucramiento genuino del sujeto en prácticas que caracterizan a una cierta comunidad y, por tanto, la diferencian de otras. Sin embargo, no podemos conferir a los recursos instruccionales un papel secundario ya que la misma perspectiva sociocultural nos ha permitido comprender el profundo efecto de los instrumentos de mediación en el conocimiento, incluso en el matemático; los recursos disponibles materializan las acciones de los miembros posibilitando así la conformación de una comunidad de práctica. En pocas palabras, desde una perspectiva sociocultural, la acción humana no se puede comprender o explicar aisladamente, separada del medio en el que ocurre. Dependiendo del tipo de comunidad, la participación en prácticas significativas de la comunidad puede demandar un menor o mayor esfuerzo y requerir de condiciones especiales entre las cuales se incluyen recursos específicos como por ejemplo la tecnología computacional.

Específicamente, creemos que si la comunidad de la que se trata es una clase de matemáticas en la que el propósito es que los estudiantes aprendan a demostrar, el tipo de participación óptima de parte de ellos no consiste en observar a un experto en acción para luego tratar de reproducir lo observado; se requieren acciones deliberadas, sistemáticas y diversas, junto con instrumentos de

---

1 Al respecto, van Oers (1996, p. 93), siguiendo a Vygotsky, señala que las cualidades del proceso de pensamiento del estudiante son generadas por las características organizacionales de la interacción social en la que el joven participa. En consecuencia, para que una función mental superior (e.g., la reflexión, la evaluación, el debate) emerja en el desarrollo del sujeto se requiere que algún participante, en el nivel social y de manera pública, asuma el papel de "pensador", "evaluador", "debatidor" público, o de persona que realiza diestramente cualquiera de las funciones mentales que se quiere desarrollar en el niño.

mediación, capaces de posibilitar la participación cada vez más autónoma y relevante en la práctica de demostrar.

En este artículo presentamos evidencia empírica —recogida en el desarrollo de proyectos de investigación que hemos venido adelantando desde el año 2004— del aprendizaje de los estudiantes para el cual el uso del programa de geometría dinámica Cabri, junto con la gestión de la profesora fueron factores determinantes.

Para comenzar, nos referimos de manera sucinta a la clase de matemáticas como comunidad de práctica, luego hacemos una breve descripción de la comunidad de práctica conformada en un curso de geometría plana que ha sido el escenario de nuestras investigaciones, y finalmente, presentamos y analizamos dos episodios que hacen parte de una experiencia de aprendizaje como participación, destacando el papel de Cabri en dicha experiencia.

2. LA CLASE DE MATEMÁTICAS COMO COMUNIDAD DE PRÁCTICA

En general, la clase de matemáticas se puede entender como una comunidad de práctica (Lave y Wenger, 1991; Wenger, 2001). *Comunidad*, por cuanto es una configuración social que se propone realizar conjuntamente una empresa: desarrollar un currículo local de matemáticas. *De práctica*, por cuanto el funcionamiento de la comunidad como tal es resultado del aprendizaje colectivo de sus miembros cuando interactúan entre sí y con el entorno para dar significado a la empresa que tienen entre manos y para participar en su consecución; tal práctica refleja tanto la búsqueda del logro en la empresa como las relaciones sociales que la acompañan (Wenger, 2001). Desde esta perspectiva, *aprender matemáticas* es tener una participación cada vez menos periférica en la respectiva comunidad de práctica.

El concepto *práctica* hace referencia a una actividad realizada en un contexto histórico y social que otorga una estructura y un significado a lo que se hace. Incluye lo que se dice y lo que se calla, lo que se explicita y lo que se da por supuesto. En palabras de Wenger (2001), incluye:

> el lenguaje, los instrumentos, los documentos, las imágenes, los símbolos, los roles definidos, los criterios especificados, los procedimientos codificados, las regulaciones y los contratos que las diversas prácticas determinan para una variedad de propósitos. Pero también incluye todas las relaciones implícitas, las convenciones tácitas, las señales sutiles, las normas no escritas, las intuiciones reconocibles, las percepciones específicas, las sensibilidades afinadas, las comprensiones encarnadas, los supuestos subyacentes, y las nociones compartidas de la realidad que, si bien en su mayor parte nunca se llegan a expresar, son señales inequívocas de la afiliación a una comunidad de práctica y son fundamentales para el éxito de sus empresas. (p. 71)

La práctica matemática mediante la cual un determinado grupo de estudiantes y profesor en un ámbito escolar específico se manifiesta como un cierto tipo de comunidad se sustenta en marcos de referencia, perspectivas y recursos compartidos que delimitan el compromiso mutuo en la acción y permiten la constitución de una identidad de los miembros con la comunidad y la construcción colectiva de significados matemáticos. Dos tipos de práctica a los que se hace referencia en la literatura son las denominadas *matemáticas de la escuela* y las *matemáticas en las que se indaga* (Cobb y Bauersfeld, 1995). Según estos investigadores, el primer tipo está caracterizado por: el seguimiento de instrucciones, un discurso en el que se manipulan símbolos sin que ello esté asociado a una actuación mental sobre objetos matemáticos, y explicaciones matemáticas que consisten en recitar secuencias de pasos para la manipulación de símbolos.

En las matemáticas en las que se indaga, profesor y estudiantes conforman una comunidad de validadores que cuestionan las explicaciones que describen simplemente la manipulación de símbolos, y en cambio aceptan aquellas en las que pareciera que se estuviera actuando sobre objetos matemáticos que les son comunes a las partes que se comunican.

Consideramos que las comunidades de práctica conformadas en cada versión del curso de geometría plana que ha sido escenario de nuestras investigaciones son del segundo tipo descrito.

3. CONTEXTO GENERAL DE LAS EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE QUE AQUÍ SE RECUENTAN

Los dos episodios que se presentan y analizan pertenecen a dos versiones de un mismo curso de geometría plana: una ocurrida en el primer semestre lectivo de 2004 y la otra en el primero de 2006. Por razones obvias, se trata de dos experiencias de aprendizaje en dos comunidades de práctica diferentes. No obstante, consideramos razonable hacer una descripción general común para las dos comunidades de práctica dado que comparten, en esencia, la “misma profesora”, los “mismos objetivos”, y la “misma empresa”. Las dos comunidades estuvieron conformadas respectivamente por dos grupos, uno de dieciséis alumnos y el otro, de treinta y seis alumnos, y por una profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad, coautora de este artículo.

El curso *Geometría Plana* está ubicado en el segundo semestre de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Los estudiantes habían cursado, el semestre anterior, *Elementos de Geometría*, una asignatura en la que se establece el primer contacto que, en la Universidad, tienen ellos con la geometría; en tal curso se realizan procesos exploratorios para que, a partir de un acercamiento informal a relaciones y propiedades geométricas, a través de temas variados dentro de un espectro amplio de los distintos dominios de la geometría, los alumnos reconstruyan o amplíen su panorama geométrico y desarrollen las competencias necesarias para poder asumir, en el siguiente semestre, un curso de geometría ajustado a un sistema axiomático. El desempeño académico de los estudiantes de ambos grupos en tal curso estuvo lejos de ser óptimo.

La profesora había tenido a su cargo la asignatura *Geometría Plana* durante varios semestres; en consecuencia, contaba con una experiencia considerable sobre diversos aspectos del mismo, debido en parte al trabajo que en torno al curso hemos realizado como grupo de investigación[2]. En particular, tenía trazada con bastante detalle la trayectoria de enseñanza y tenía identificados ciertos aspectos que resultaban ser problemáticos para los estudiantes en su proceso de aprender a demostrar ceñidos a un sistema axiomático. Convencida de que es imprescindible que los

[2] Un recuento del trabajo de investigación en la implementación de la primera version del curso se puede encontrar en Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006).

estudiantes experimenten la actividad demostrativa en toda su extensión[3] y con la hipótesis de que el uso de la geometría dinámica podría apoyar el logro de tal objetivo, introdujo en su clase el uso de Cabri. Así, en la experiencia investigativa que aquí reportamos, inicialmente los estudiantes usaban Cabri en ciertos momentos de la clase, pero al finalizar el curso, Cabri era un instrumento disponible de manera permanente.

Durante la mayor parte del curso *Geometría Plana*, la profesora embarcó a sus estudiantes en la empresa de reconstruir un sistema axiomático para una porción de la geometría euclidiana del plano, a partir de la propuesta del texto[4] usado; hacia el final, varió un poco la empresa a realizar, pues ya no se trataba de reconstruir sino de construir el sistema axiomático correspondiente a un tema geométrico particular, sin el apoyo del texto. En esta comunidad de práctica, el propósito era que los estudiantes avanzaran en su aprendizaje de la demostración en matemáticas, es decir, que cada vez pudieran participar de manera más genuina (i.e., con una motivación interna, conscientes de su papel en la consecución de la empresa), autónoma (i.e., con razones propias para fundamentar lo que se dice y lo que se hace, independiente de los otros como autoridad), y relevante (i.e., aportes que vienen al caso y que son valiosos aun si son incorrectos) en la práctica de la demostración.

Para hacer factible la participación de los estudiantes en esta comunidad de práctica, desde el inicio del curso, la profesora explicitó la exigencia de que ellos prepararan de antemano, el tema que se trataría en cada clase e inició la constitución de una práctica discursiva conocida en esta comunidad como "conversación entre la profesora y un alumno en el tablero". Este mecanismo principal de interacción entre profesora y estudiante se modificaba en algunos casos aceptando que otros alumnos intervinieran para apoyar a quien estaba en el tablero; eventualmente, la interacción terminaba haciéndose entre la profesora y el grupo de estudiantes. Con esa forma de trabajo, la práctica de enseñanza se apartó decididamente del esquema conocido como enseñanza directa; en realidad, sin exageración alguna, la clase siempre fue desarrollada en un esfuerzo conjunto de la profesora y un estudiante o el grupo de estudiantes, en un esquema en el que la profesora proponía preguntas o tareas específicas a quien estaba en el tablero y entablaba una conversación en torno a lo que el estudiante iba haciendo para cumplir la tarea propuesta. Es importante destacar que una de las normas que reguló la práctica discursiva desde el principio del curso, exigía justificar, desde el sistema axiomático, toda afirmación de contenido geométrico.

En ocasiones, la profesora planteaba situaciones problema que los estudiantes debían realizar con el apoyo de Cabri, individualmente o en pequeños grupos; la intención con tales tareas era involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa pues debían explorar la situación, conjeturar, y validar la conjetura. Después de tal trabajo se realizaba una puesta en común coordinada por la profesora, en la que se reconstruía públicamente lo realizado en los grupos y se exponían los resultados logrados.

4. RECUENTO Y ANÁLISIS DE DOS EXPERIENCIAS DE PARTICIPACIÓN EN ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

En esta sección relatamos dos episodios; el primero tuvo lugar al desarrollar la unidad de enseñanza correspondiente a cuadriláteros y el segundo al desarrollar el tema de la distancia

[3] Es decir, que no sólo se ocupen de la tarea de justificar sino que también exploren situaciones problema y a partir de ello, formulen conjeturas.

[4] El libro de texto usado fue Moise, E. y Downs, F. (1970). *Geometría Moderna* (traducción de Mariano García). Fondo Educativo Interamericano, S.A.

mínima entre dos puntos. En ambos casos, hacemos un análisis que pretende poner de manifiesto factores que configuran los sucesos; en particular, precisamos en qué pudo haber influido el uso de Cabri.

Episodio 1: Una situación problema relativa a cuadriláteros

El curso está entrando en la recta final. Para desarrollar el currículo correspondiente al tema de cuadriláteros, la profesora introduce una variación: no van a reconstruir el sistema axiomático siguiendo el libro de texto como lo han hecho hasta ese momento con los temas anteriores; ahora, van a construirlo ellos mismos involucrándose en una actividad matemática de indagación en la que se explora, se conjetura y se demuestra. La profesora plantea entonces una situación problema y destina un tiempo de la clase para que los estudiantes trabajen conjunta o individualmente en su solución. Cabri es ahora un recurso disponible de manera permanente en la clase y cada estudiante cuenta con una calculadora. Durante el trabajo de los estudiantes, la profesora se acerca a ellos para informarse de lo que están haciendo. Al cabo de un rato, la mayoría de estudiantes tiene una conjetura como posible respuesta al problema; la profesora abre entonces un espacio para hacerlas públicas; varios estudiantes participan enunciando su conjetura. Inmediatamente después se centra la atención en dos de las conjeturas enunciadas.

La situación problema

> Determinen los cuadriláteros para los cuales una diagonal biseca a la otra diagonal. Exploren y estudien la situación de tal manera que, entre todos, lleguemos a la mayor cantidad posible de conclusiones. Pueden trabajar en grupo si lo quieren.

Al examinar el tipo de tarea propuesta, podemos reconocer que se trata de un problema, planteado en un contexto matemático, para el cual no hay una única respuesta. La condición exigida en el problema para las diagonales de un cuadrilátero no produce un tipo reconocido de figura; sin embargo, los estudiantes pueden adicionar otras condiciones, de manera inconsciente o deliberada, con lo cual se propicia la posibilidad de respuestas distintas. Por ejemplo, se pueden tomar diagonales que se bisequen mutuamente, en cuyo caso se tiene un paralelogramo; o, diagonales que además de bisecarse mutuamente sean perpendiculares, lo que resulta en un rombo. De hecho, en la puesta en común se recogieron las siguientes conjeturas obtenidas a partir de la exploración en Cabri:

James y Mariela:	1.	Los cuadriláteros en los cuales una diagonal biseca a la otra son paralelogramos.
Lulú:	2.	Sea el cuadrilátero *ABCD* con seg*AB* congruente con seg*CB* y seg*AD* congruente con seg*CD*, entonces seg*BD* biseca a seg*AC*.
Reinaldo:	3.	Se puede cumplir que en muchos cuadriláteros, una diagonal sea bisectriz de la otra.
Fabio:	4.	Las diagonales deben intersecarse en el interior del cuadrilátero.
	5.	Los cuadriláteros para los cuales una diagonal es bisectriz de la otra deben tener dos pares de lados congruentes.

Talia:	6.	Si el cuadrilátero es un paralelogramo entonces sus diagonales se bisecan.
Daniel:	7.	Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares y sólo una biseca a la otra, entonces el cuadrilátero es una cometa.
Lisandro:	8.	Si las dos diagonales se bisecan y son perpendiculares, siendo éstas congruentes, el cuadrilátero es un cuadrado.
	9.	Si las diagonales se bisecan y son perpendiculares pero no congruentes, el cuadrilátero es un rombo.
Gabriel:	10.	En una cometa las diagonales son perpendiculares y una de ellas biseca a la otra.

Pero no sólo no hay una única solución para el problema sino que además no hay un camino predeterminado para abordarlo. De hecho, identificamos cuatro vías por las que se movieron los estudiantes:

- Elegir un tipo de cuadrilátero, del que saben o intuyen que cumple las condiciones específicas, construirlo y examinar si éstas se cumplen (e.g., construir una cometa y constatar que una diagonal biseca a la otra; construir un cuadrilátero con tres lados congruentes, disponerlo como un cuadrado y constatar que las dos diagonales se bisecan, y al modificarlo notar que la condición de las diagonales se pierde a menos que el cuadrilátero sea un paralelogramo).

- Construir un cuadrilátero cualquiera con sus diagonales, modificarlo, usando el arrastre de los objetos para que parezca un cuadrilátero específico, e ir examinado el comportamiento de sus diagonales en el aspecto relativo a las condiciones impuestas (e.g., modificar el cuadrilátero construido hasta tener una figura con apariencia de paralelogramo y notar que una diagonal biseca a la otra).
- Construir un cuadrilátero cualquiera con sus diagonales, modificarlo por arrastre hasta que parezca que las diagonales cumplen las condiciones en cuestión y notar qué tipo de cuadrilátero parece ser (e.g., construir un cuadrilátero con sus diagonales y en ellas marcar el respectivo punto medio, modificar el cuadrilátero hasta lograr que los puntos medios coincidan y entonces reconocer que el cuadrilátero es un paralelogramo).
- Construir dos segmentos —que serán las diagonales— que cumplan las condiciones específicas; a partir de ellos construir el cuadrilátero, y examinar y constatar de qué tipo de cuadrilátero se trata (e.g., a partir de dos segmentos uno de los cuales biseca al otro y que representan las diagonales de un cuadrilátero, construir el cuadrilátero, hacer modificaciones que cambian la forma del cuadrilátero sin cambiar la condición de las diagonales y ver que los cuadriláteros que se obtienen no son especiales).

La presentación usual del contenido en una clase universitaria de matemáticas suele hacerse en la secuencia definición-postulados-teoremas-ejercicios/problemas que ponen en juego la teoría planteada. En ese marco de referencia, es prácticamente imposible que los estudiantes puedan participar en la construcción de la teoría: ¿cómo podrían inventarse una definición de un objeto matemático que coincida con la definición oficial?, ¿cómo podrían establecer un resultado matemático coherente con una teoría si no se han percatado de alguna relación o una propiedad? Con respecto a la secuencia habitual esbozada, iniciar el estudio de un tema con el planteamiento de una situación problema que debe ser resuelta por los estudiantes, desafía el mito de que el papel de los estudiantes en el proceso de aprendizaje se tiene que reducir a aplicar la teoría desarrollada por el profesor o el autor del libro de texto. En el episodio que hemos relatado, el uso de Cabri para explorar la situación propuesta no sólo permitió que los estudiantes asumieran una posición activa sino que condujo a la producción de diversas conjeturas enunciadas por ellos, que luego fueron organizadas para construir el sistema axiomático correspondiente.

Actividad para abordar la situación problema

Hacer de la clase de matemáticas una comunidad de práctica de indagación incluye, entre otras cosas, crear oportunidades para que los estudiantes puedan realizar aportes individuales, discutir con compañeros y con el profesor, y negociar significados; es a través de dichas acciones como los estudiantes se convierten en miembros activos de dicha comunidad. Para generar tal tipo de oportunidades, en el caso que nos ocupa, no era suficiente proponer a los estudiantes una situación problema como la que se les planteó; era necesario garantizar, en cuanto fuera posible, que la actividad de los estudiantes al abordar el problema fuera realmente fuente de acciones que impulsaran su participación y la formulación de conjeturas.

Para lograrlo, la profesora vio la necesidad de gestionar el curso de la actividad de exploración de los estudiantes; esa fue la principal razón para decidir que los estudiantes abordaran la situación en la clase y no fuera de ella. Específicamente, esta decisión atendía a la siguiente problemática: era la primera vez que en el curso se les planteaba a los estudiantes una tarea en la que ellos podían, ya fuera consciente o inconscientemente, adicionar condiciones y por tanto obtener diferentes respuestas; dado que lo habitual en la clase de matemáticas es que los problemas tengan un única respuesta y además, que el principal interés esté en la respuesta correcta, hay una tendencia de parte de los estudiantes a uniformar sus respuestas cada vez que tienen la posibilidad de hacerlo; en este orden de ideas, era natural esperar que si los estudiantes tenían la oportunidad de interactuar entre ellos por fuera de clase en lo tocante a la solución de la tarea, ellos unificarían sus respuestas, perdiéndose probablemente la variedad en las respuestas correspondiente a las diversas aproximaciones al problema, y esto iría en contravía de lo que se quería vivenciar cuando se tratara el asunto de manera pública, entre otras cosas porque habría menos oportunidad de disentir, de asombrarse, de discutir, de negociar significados, y de experimentar que la teoría había sido producto de su trabajo de exploración.

Durante la exploración de la situación, los estudiantes trabajan principalmente de manera individual y apoyados en Cabri. La profesora pasa por los puestos con el propósito de enterarse de las acciones realizadas para abordar la situación y de los resultados a los que están llegando, información que luego utiliza en la puesta en común para animar a los estudiantes que no se atreven por su cuenta a exponer públicamente sus conjeturas. En la puesta en común realizada para recoger las respuestas al problema, entre nueve alumnos enuncian diez conjeturas, cada una de las cuales es designada con el nombre de quien la formula; esta acción tiene la intención de volcar la responsabilidad de las distintas conjeturas en sus autores cuando éstas sean consideradas con miras a establecer el respectivo acuerdo de la comunidad. En el proceso de analizar las diferentes conjeturas, la profesora juega un papel clave en la determinación de la secuencia en que éstas se revisan, teniendo en cuenta dos criterios: el examen de una conjetura no debe quitarle sentido al examen de otra, y el examen de una conjetura debe respetar la organización teórica que permite construir sobre unos elementos para obtener otros. En suma, la actividad que tuvo lugar en la clase, bajo la gestión de la profesora, les permitió a los estudiantes vivir una experiencia de participación genuina, autónoma y relevante en el proceso de responder al problema planteado; la comunidad toda fue consciente de estar trabajando sobre asuntos que fueron resultado de la exploración que sus miembros habían hecho; a través de esta oportunidad en la que se modeló un comportamiento deseable en relación con el proceso para resolver la tarea propuesta, los estudiantes pudieron darle sentido a la tan trillada pero a la vez vaga idea de construcción social del conocimiento.

Papel de Cabri en la experiencia de aprendizaje

Una mirada rápida permite advertir que aunque la tarea se puede abordar con papel y lápiz, hacerlo con Cabri libera a los estudiantes de tener que repartir el tiempo disponible entre dos tareas: realizar dibujos con precisión y hacer sobre ellos la respectiva exploración. Con el recurso tecnológico pueden enfocar su atención y esfuerzo en un proceso de exploración empírica de las construcciones hechas en Cabri con miras a detectar regularidades que los puedan conducir a la formulación de conjeturas. Además, el programa les permite desechar o aceptar sus propias ideas sin tener que recurrir a la profesora —es decir, el aval de sus decisiones se logra a través de la información que pueden desentrañar con la calculadora;

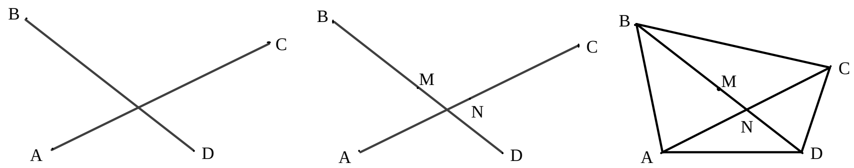
ésta les da la confianza necesaria para formular conjeturas y hacerlas públicas, pues algún elemento de validez deben tener las propuestas así obtenidas. Sin embargo, la mediación instrumental del programa Cabri fue más allá. Pudimos detectar comportamientos inusitados pero deseables en una clase donde aprender es participar cada vez más en la actividad demostrativa. Veamos algunos de ellos, analizando algunos fragmentos de la clase, organizados secuencialmente.

Fragmento 1. James objeta, duda, revisa. En la puesta en común, James ha sido el primero en explicitar su conjetura: “Los cuadriláteros para los cuales una diagonal es bisectriz de la otra son paralelogramos”. Posteriormente, Reinaldo comunica la suya: “Un cuadrilátero cualquiera… Se puede cumplir que en muchos cuadriláteros, una diagonal biseca a la otra”. En voz baja, James objeta: “Son paralelogramos”, y le hace señas a Reinaldo para que le preste atención, pero éste está atento a dictar su conjetura a la profesora, quien la está escribiendo en el tablero. Habiendo advertido la situación y dándose cuenta de que James cogió la calculadora de Reinaldo, la profesora pregunta: “¿Qué era lo que ibas a decir a Reinaldo? James explica: “Que debe tener dos pares de lados congruentes”. La profesora pregunta a James si cree que Reinaldo se equivocó, pero él, en lugar de asentir, indica que quiere mirar la construcción en Cabri para examinar si es cierto lo dicho por Reinaldo.

Al considerar los sucesos registrados en el Fragmento 1, es posible reconocer un comportamiento de participación genuina y autónoma cuando James, por iniciativa propia, objeta la conjetura propuesta por Reinaldo, duda acerca de su objeción y revisa la construcción hecha por su compañero. Desde nuestra perspectiva, el rasgo que nos permite caracterizar mejor el comportamiento de James como un acto de participación genuina, es la motivación interna que da origen a sus acciones. Objetar, dudar, revisar son acciones propias de una práctica matemática de indagación y James las lleva a cabo sin que haya un agente externo impulsándolo a hacerlas.

El involucramiento de James en un proceso que lo conduce a un resultado del que está convencido y la explicitación de un resultado que contradice al suyo constituyen la motivación interna de las acciones de James. De tal involucramiento es responsable Cabri.

Fragmento 2. James y Reinaldo, responsables de la búsqueda de la verdad con respecto a sus conjeturas. La puesta en común para recoger otras conjeturas ha continuado y mientras eso ocurre en el grupo, James está revisando la construcción realizada por Reinaldo en Cabri. Cuando se disponen a comenzar el análisis de las conjeturas anotadas en el tablero, de nuevo por iniciativa propia y de manera pública, James compara la conjetura a la que llegó a partir de su construcción, con la de Reinaldo: “Pues, ya miré la de Reinaldo y con ella, la mía ya no se cumple”. La profesora le sugiere analizar ambas conjeturas: “Tú tomaste la calculadora de Reinaldo y te diste cuenta ¿de qué? ¿Viste lo que Reinaldo estaba afirmando?”. James comenta que en la construcción de Reinaldo se puede ver un cuadrilátero que cumple la condición pero que no tiene lados paralelos ni congruentes. Este comentario centra la atención en la construcción de Reinaldo. La profesora pide a Reinaldo dibujar en el tablero la construcción hecha en Cabri. Reinaldo explica a la vez que va haciendo una figura en el tablero: “*A*, *B*, *C*, *D*. Entonces lo que hice fue trazar estas diagonales *BD* y *AC*, luego hallé el punto medio del segmento *BD* y lo llamé *M*, luego hallé el punto medio de *AC* y dio por acá y lo llamé *N*. Entonces lo que hice fue mover esta recta, este segmento [*AC*] de tal forma que coincidiera este punto [*N*] sobre esto [segmento *BD*] o al contrario, este punto coincidiera con esta diagonal”. [La siguiente figura presenta la secuencia correspondiente a las acciones mencionadas.]”. La profesora pregunta: “Y, ¿te dio qué?”. “Dio un cuadrilátero raro”, dice Reinaldo.



Los sucesos registrados en el Fragmento 2, son evidencia de actos de participación no sólo genuina y autónoma sino relevante para la tarea que la comunidad tiene entre manos. Por una parte, James, quien se ha autoasignado la tarea de verificar si la conjetura de Reinaldo es cierta, al concluir que sí lo es, deduce que la suya es insostenible y comunica ese resultado al grupo. La revisión de la construcción hecha en Cabri por Reinaldo, es un factor clave que le permite a James encontrar contrajemplos para su conjetura; en su exploración y usando el arrastre, James se da cuenta de que la condición de las diagonales se cumple sin que el cuadrilátero sea paralelogramo. Por otra parte, la descripción que hace Reinaldo de su construcción en Cabri constituye una explicación para apoyar la aceptación de su conjetura y el rechazo de la de James. De nuevo, es un estudiante y no la profesora quien da elementos para tomar decisiones relativas al contenido geométrico.

La interacción profesora - par de estudiantes - Cabri, lleva a la negociación de la veracidad de una de las conjeturas propuestas.

Cabe resaltar que en estos sucesos reconocemos un ambiente que propicia actos de participación de los estudiantes, como los descritos. Por una parte, el apoyo de la profesora a través de preguntas, sugerencias, comentarios, etc. se ha reducido notoriamente; por otra parte, acepta esquemas de trabajo que no son los usuales en una clase de matemáticas; por ejemplo, al darle su visto bueno a la tarea que James se ha autoasignado, indirectamente acepta eximir a James de que atienda y participe en lo que está ocurriendo en el trabajo en grupo mientras él trabaja individualmente.

Fragmento 3. La responsabilidad de construir significado para la conjetura de Reinaldo es del alumno y la profesora avala ese comportamiento. La profesora se dirige al grupo para volcar en él la responsabilidad de la aceptación del enunciado de Reinaldo: "Pueden hacer la construcción [en la calculadora] para ver si a ustedes también les da un cuadrilátero raro. Para ver si estamos de acuerdo". Reinaldo interviene de manera espontánea para mostrar con más claridad lo que ha dicho; la profesora no sólo acepta tal intervención sino que invita al grupo a atenderla.

La seguridad que tiene Reinaldo de la veracidad de su conjetura, fruto del trabajo que ha hecho en Cabri, lo lleva a asumir, como parte de su responsabilidad, la aclaración de lo que ha expuesto previamente cuando la profesora solicita al grupo analizar la conjetura propuesta por él. Ni él ni el grupo están esperando que la profesora aclare, explique, diga la última palabra; ellos se sienten parte integrante de la comunidad y se responsabilizan de la búsqueda de la verdad.

Fragmento 4. James reinterpreta las explicaciones de Reinaldo y la profesora señala un punto clave que los estudiantes parecen no haber advertido. La profesora le pide a James explicar al grupo lo que ha entendido. El estudiante pasa al tablero y hace una representación gráfica mientras verbaliza su explicación: "Tenemos un segmento que va a ser la diagonal bisecada, supongamos que el punto medio sea X, ahora tenemos otro segmento, la otra diagonal que es la que podemos mover de manera que siempre pase por X, podemos ir rotándola y entonces eso hace que no necesariamente sea un paralelogramo ni nada". Luego se da la siguiente conversación entre la profesora y James:

Profesora:	Pero, entonces ¿qué pasó? ¿Por qué a tí te dio un paralelogramo?
James:	No sé.
Profesora:	No sabes.
James:	Inicialmente lo que hice fue trazar los dos segmentos para que se bisecaran.
Profesora:	¡Ah! entonces tenemos un cambio. Tú cambiaste un poco mi condición. […] Entonces, James hasta ahora está descubriendo que él le puso una condición adicional. Yo no dije que no podía. Yo dije quiero que se cumpla esta, pero él agregó otra. Y, ¿qué descubrió? Vamos a ver. Los cuadriláteros en los cuales las diagonales se bisecan son paralelogramos. ¿Eso será cierto? […]

James hace una explicación en la que evidencia haber comprendido a cabalidad que la conjetura de Reinaldo es aceptable. Cabe notar que la explicación de James es dinámica, reflejo de su interacción con la calculadora; además, se constituye en un argumento general de la validez de la conjetura de Reinaldo.

Cuando la profesora le pregunta por qué razón en la construcción hecha por él, la figura era un paralelogramo, responde no saber. Sin embargo, cuando por iniciativa propia explicita la reconstrucción de sus acciones en Cabri, surge de manera natural la oportunidad para que la profesora destaque para el grupo lo que varios estudiantes han hecho en la exploración de manera no consciente: agregar alguna condición a la situación inicialmente planteada. La intervención de James además da pie a la profesora para dar inicio a la formulación correcta de la conjetura de James y su incorporación al sistema a través de la demostración.

Episodio 2. Una situación problema relativa al tema de mínima distancia

Hacia mediados del semestre, en una sesión de dos horas, la profesora propone a los estudiantes una situación problema para que la trabajen en grupos. Una de las integrantes del equipo de investigación actúa como observadora, acompañando al grupo conformado por Nancy, Fabricio, Leonardo y Medardo durante todo el proceso, que fue grabado en audio y video. Las intervenciones de la observadora se limitan a pedir a los estudiantes que anticipen la respuesta al problema y solicitar repetición de ideas para favorecer el registro de los sucesos. Los estudiantes disponen en esta ocasión de una sola calculadora para los cuatro, situación provocada a propósito para estimular la interacción. Antes de entregarles el enunciado de la situación problema, la profesora da indicaciones generales invitando a los estudiantes a constituir un auténtico equipo de trabajo en donde todos participen y colaboren con sus ideas. Les pide actuar de manera espontánea, expresar sus opiniones y hablar lo más claro y correctamente posible, nombrando los objetos geométricos con letras. Además, les recuerda que pueden trabajar en papel, si así lo quieren, y que, en caso de borrar lo hecho en la calculadora, expliciten por qué lo hacen.

La situación problema

> Se da una recta *m* y dos puntos *P* y *Q* al mismo lado de la recta. Determinen el punto *R* de *m* para el cual la distancia *PR* más *QR* sea la menor. Justifiquen su respuesta. Recuerden que determinar significa hacer una descripción geométrica de cómo encontraron el punto.

No obstante tener una única respuesta, este problema resulta interesante, desde el punto de vista didáctico, porque es una oportunidad para que los estudiantes tengan una práctica matemática especial al involucrarse en una actividad de formulación y validación de conjeturas para llegar a determinar geométricamente el punto solicitado (i.e., lograr un procedimiento geométrico de construcción), y de búsqueda de ideas matemáticas para justificar por qué el punto determinado es el que se busca. Además, sin lugar a dudas, resolver el problema exige a los estudiantes llevar a cabo una exploración empírica de la situación geométrica implicada pues, por una parte, difícilmente se puede encontrar el punto a partir de un análisis netamente teórico, y, por otra parte, demostrar que el punto encontrado cumple la condición impuesta, requiere el uso de construcciones auxiliares.

En lo que sigue pretendemos documentar aspectos de la actividad de los estudiantes al realizar la primera parte de la tarea que se les encomendó; reconocemos en tales aspectos indicios de que Cabri representó un recurso utilísimo para apoyar la participación autónoma, genuina y relevante de los estudiantes en una práctica propia de la comunidad matemática de la clase y, por ende, para favorecer el aprendizaje visto como participación cada vez menos periférica, en dicha comunidad.

Aspectos de la actividad de los estudiantes en los que Cabri fue un recurso valioso

La decisión inicial de Fabricio de ubicar a *R*, al tanteo, permite al grupo actuar matemáticamente sobre el problema. Nancy lee el enunciado del problema en voz alta. La investigadora que actúa como observadora les pide hacer una rápida anticipación sobre el punto *R*. Fabricio piensa que *R* está en la mediatriz del segmento *PQ*, Leonardo opina que *R* tiene que estar entre los puntos que son proyección ortogonal de *P* y *Q* sobre la recta *m*, Medardo —con el supuesto tácito de que los dos puntos tienen que estar a la misma distancia de la recta *m*— cree que *R* es la proyección ortogonal de *P* o de *Q* sobre *m*, y la anticipación de Nancy coincide con la de Fabricio. Éste es quien maneja desde el principio y durante la mayor parte del tiempo la calculadora. Lidera el proceso de construcción, pero involucra a sus compañeros y atiende sus sugerencias y comentarios. Sin dudarlo, toma una decisión que refleja el dominio que posee del entorno Cabri: construye a *R* sobre la recta, en cualquier parte, y después, usando el arrastre, lo ubica en el punto solución.

La decisión de Fabricio podría parecer un hecho trivial; sin embargo, es posible reconocer que no lo es cuando se compara con acciones de otros estudiantes quienes, tratando de replicar lo que harían con lápiz y papel para explorar la situación, consideran tres o cuatro puntos específicos sobre la recta, para cada uno de ellos calculan la suma de distancias respectivas y las comparan. La acción de Fabricio refleja un estilo de trabajo propio de Cabri según el cual, se libera de condiciones al objeto que se busca, para obtener así una familia, uno de cuyos miembros cumple la condición específica deseada; su decisión permite aprovechar el arrastre de los objetos para analizar el problema en forma dinámica. Veamos el fragmento de conversación que refleja lo dicho:

20	Fabricio:	[9:28] Entonces, primer paso sería construir la recta *m*. [En la calculadora construye una recta.] Ya está la recta *m*. Dos puntos *P* y *Q*, al mismo… ¿arriba o abajo?
21	Nancy y Leonel:	Al mismo lado, arriba.
22	Fabricio:	Entonces un punto, digamos *P*, acá, y un punto *Q* por acá. Ahora, los nombramos. [Construye dos puntos en un mismo semiplano con respecto a la recta *m*, que no parecen tener la misma distancia a ella; pone etiquetas a los objetos construidos.] …
26	Fabricio:	[Verbalizando mientras realiza acciones en la calculadora.] Un punto sobre la recta, un punto *R*. Un punto en esta recta y lo llamamos *R*. Ahora tenemos que hallar la menor. Que la distancia del punto *P* al punto *R* más la distancia del punto *Q* al punto *R* sea la menor posible. Entonces, hallamos la distancia que inicialmente hay y luego miramos… movemos el punto a ver, por tanteo, dónde lo hallamos. Entonces, sería hallar la distancia…

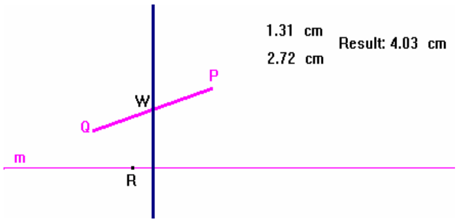
27	Leonardo:	*PR* más *QR*.
28	Fabricio:	*PQ*… y la distancia entre *R* y… y luego sumarlas. [Pausa] Este es *PQ* y esta es *QR*. [Pausa larga mientras realiza las acciones que ha anunciado] Listo. *PR*. Ahora, hallar, calcular… calcular esto [en la pantalla aparecen las medidas 1.47 y 1.87].
		…
31	Leonardo:	Y, ahora mover el punto *R*.
32	Fabricio:	[A medida que arrastra el punto *R* sobre la recta *m* va diciendo en voz alta los valores de la suma.] Tres treinta y dos, tres treinta, tres veintiocho, tres veintiséis, tres veinticinco, tres veintitrés, tres veintiuno, tres veinte, tres diecinueve. Baja, baja, baja, baja, baja, baja, baja, baja … sube.
33	Leonardo:	¿Dónde quedó?
34	Fabricio:	En esa parte está, tres ocho, tres nueve, tres ocho, y ahí vuelve a subir a tres nueve. Es en esta parte. Entonces… [Pausa. Mira el enunciado del problema.] Geométricamente,

Los estudiantes han encontrado, con una buena aproximación, la posición del punto *R* para el cual la suma de las distancias de *R* a *P* y a *Q* es mínima. Contando con esta información, aunque no tengan una vía clara de solución, ya tienen manera de actuar matemáticamente sobre el problema: por un lado, pueden poner a prueba conjeturas que expresan sus ideas relativas a cómo podría construirse geométricamente el punto buscado (i.e., tienen un criterio de decisión para aceptar o rechazar la conjetura); por otro lado, tienen un elemento perceptual que les “dispara” ideas generadoras de propuestas razonables de cómo se podría construir geométricamente el punto buscado.

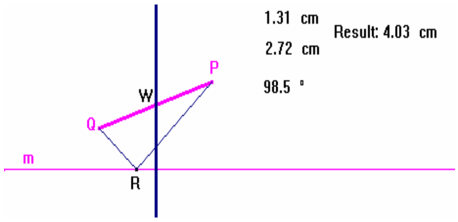
Los estudiantes logran una construcción geométrica del punto *R*, después de un proceso de actuación matemática sobre el problema. Una vez visualizada la posición del punto *R* para el cual se cumple la condición, los estudiantes se involucran en un trabajo colaborativo, apoyado de lleno en Cabri, que tiene como propósito construir geométricamente el punto que han hallado al tanteo. En un proceso que toma cuarenta minutos de la sesión, el grupo alcanza su cometido después de haber considerado ocho propuestas planteadas por sus miembros. En términos generales, el esquema de trabajo consiste en: plantear de manera más o menos precisa una idea; si no hay una objeción inmediata, la implementan en la calculadora y examinan si funciona para lo que se quiere; en caso de desecharla, hacen otra propuesta. Fabricio lidera el proceso en la medida que es él quien maneja la calculadora para examinar las diferentes propuestas.

A continuación presentamos en nuestras palabras, las ideas que fueron examinadas y desechadas por el grupo después de que su exploración en Cabri les permitiera ver que no eran útiles para determinar el punto *R* buscado; el orden de presentación indica la secuencia en que aparecieron durante el proceso. También se presenta la propuesta que finalmente sí los conduce a lo que quieren. Los puntos *X* y *Y* en los diagramas son las proyecciones perpendiculares de los puntos *P* y *Q* respectivamente.

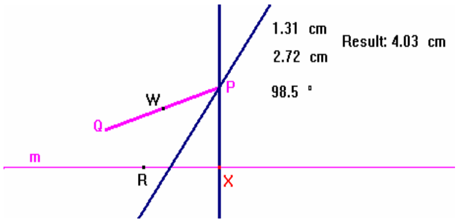
1. Medardo: Construir a *R* como el punto de intersección de la recta *m* y la perpendicular a *m* desde *W*, punto medio del seg*PQ*.



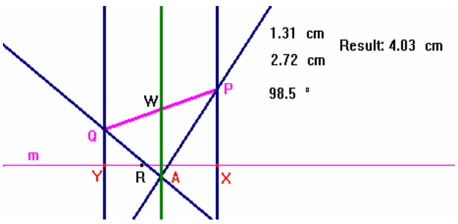
2. Leonardo: Examinar el ang*PRQ* en busca de una característica especial.



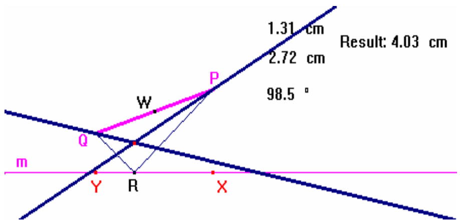
3. Fabricio: Construir la recta perpendicular a *m* desde *P*, construir la bisectriz de ang*XPQ*. *R* sería el punto de intersección de la bisectriz y de la recta *m*.



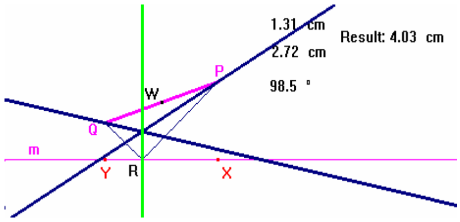
4. Leonardo: Construir las rectas perpendiculares a *m* desde *P* y desde *Q*, construir las bisectrices de ang*XPQ* y de ang*YQP*, construir la recta perpendicular a *m* desde el punto de intersección de las bisectrices. *R* sería la proyección ortogonal de tal punto de intersección sobre la recta m.



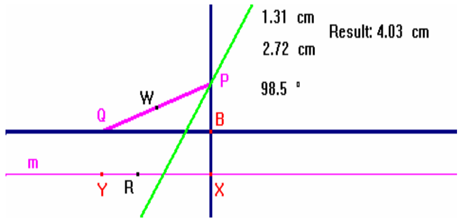
5. Nancy: Construir las bisectrices de ang*QPR* y de ang*PQR*, examinar el punto de intersección de tales rectas.



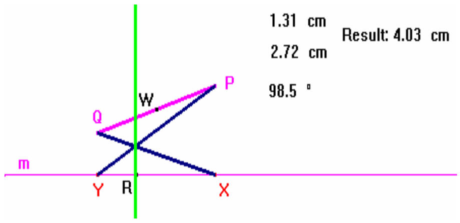
6. Medardo: Construir bisectrices de ang*QPR* y de ang*PQR*, construir recta perpendicular a *m* que pase por el punto de intersección de tales bisectrices.



7. Medardo: Construir una paralela a *m* por el punto *Q*, construir una perpendicular a *m* por el punto *P*, construir las bisectrices del trián*QPB*.



8. Fabricio: Construir seg*PY* y seg*QX*, construir la recta perpendicular a *m* por el punto de intersección de los dos segmentos construidos.



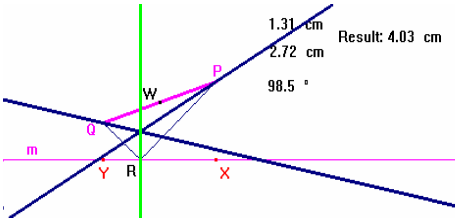
En el proceso anterior, reconocemos que las diferentes ideas examinadas en Cabri aportaron elementos que posibilitaron el surgimiento de la conjetura final; de manera especial, vemos la utilidad de la proyección ortogonal de un punto, la construcción de un segmento perpendicular a la recta desde uno de los extremos del seg*AB* y la proyección ortogonal de la intersección de dos segmentos especiales.

La producción de ideas para encontrar la construcción geométrica de *R* y el examen de las mismas ocurren dentro de una verdadera conversación entre los estudiantes

210 Fabricio: Bueno, entonces, el punto de intersección de las dos bisectrices que hemos hallado lo llamamos *A* y ahora vamos a hallar la perpendicular a *m* por el punto *A*. A ver si esa perpendicular coincide con el punto *R*. Entonces… perpendicular a la recta *m* [hace lo mencionado en la calculadora.]

211 Medardo: ¡Uy!, sí. ¡Qué bien!

212 Fabricio: Sí coinciden. [Tienen una figura como la siguiente en la calculadora].



213 Nancy: ¿Por qué? [Se sonríe] Es la pregunta que se me ocurre siempre. No me vayan a preguntar a mí.

214 Todos: Ja ja ja.

215 Observadora: ¿O sea que ya lo tienen determinado geométricamente?

216 Leonardo: No. Geométricamente, no.

217 Medardo: Ese punto, pues… al tanteo

218 Fabricio: Sinceramente, no; porque partimos del punto al que queríamos llegar. Tenemos es que partir de estos dos puntos y llegar a este [señala en la pantalla]. O sea, partimos del punto *R* para llegar al mismo *R*. O sea, ahí no…

219 Medardo: No, porque ahí partimos fue del punto de la intersección.

220 Fabricio: Pero para poder hallar esas bisectrices tenemos que tener ese punto *R* para poder formar los ángulos. Y si no, no existirían los ángulos. O, sí podemos crear más ángulos, pero ¿cómo saber que nos van a coincidir? [Pausa. La siguiente explicación la hace señalando en la pantalla los objetos a los que se va refiriendo]. O sea, si no hubiéramos tenido este *R*, pongamos que tuviéramos cualquier punto… digamos este *X* o este *Y*. Hubiéramos trazado las bisectrices y las hubiéramos intersecado y nos hubiera dado… yo creo que no nos hubiera dado en el mismo punto; nos hubiera dado, digamos, por este lado. Y al trazarla, pues nos quedaría corrido el punto que queremos hallar.

221 Nancy: ¿Por qué no miramos esa posibilidad, a ver qué pasa?

222 Medardo: Corra el punto *R*.

223 Fabricio: Movemos el punto *R* hacia *X*. Lo voy a poner sobre…, que concuerde con *X*. [Pausa] Si *R* hubiera coincidido con *X*, si hubiéramos escogido, por ejemplo, al punto *X*… ¿qué hubiera pasado? [Hace en la calculadora lo anunciado y va señalando los

		objetos a los que se va refiriendo]. Nos hubiera quedado este triángulo *PQX*, ¿cierto? La bisectriz… sería esta, la bisectriz del ángulo *QPX* [no se entiende] en este caso, sería esta, y la bisectriz del ángulo *PQR*, sería esta. Intersección *A*, pero ese punto no nos concuerda con el *R* que teníamos. O sea, dependemos de la posición de este *R* para utilizar este procedimiento, entonces, no nos sirve. [Pausa] Entonces, por ese lado, tampoco.
224	Observadora:	¿Tampoco? [Pausa]
225	Medardo:	No, porque podría ser cualquiera. No nos dan…
226	Fabricio:	[Desplaza el punto *R* a la ubicación que tenía anteriormente.] Entonces, reformulemos otra vez. Borremos otra vez. [Mira la pantalla]

En la actividad realizada por los estudiantes para determinar geométricamente el punto que cumple la condición impuesta, cada uno de los miembros del grupo aporta ideas; de ello hay evidencia clara, por ejemplo, en la secuencia de ideas examinadas que acabamos de exponer, en donde se informa quién aportó cada propuesta. Sin embargo, la participación fue mucho más que la suma de aportes individuales. Tuvo lugar una verdadera conversación entre los estudiantes, movida por un propósito claro y común para todos, en la que compartieron sus conocimientos y los pusieron al servicio de una empresa común. Fue una conversación en la que los estudiantes se escucharon, se corrigieron, se apoyaron, compartieron significados, etc. En ese sentido, reconocemos que la primera propuesta en la que se trató de construir a *R* con base en la bisectriz de algún ángulo, sirvió de modelo para que los demás estudiantes hicieran propuestas diferentes pero también con base en bisectrices. También reconocemos que algunas de las propuestas son resultado de aunar esfuerzos para concretar y precisar la idea inicial de alguno de los estudiantes. A continuación, tratamos de documentar lo dicho.

Nancy plantea su idea, que en realidad no es una conjetura: propone trazar los segmentos *QR* y *PR*, construir las bisectrices de los ángulos *P* y *Q* y mirar si el punto de intersección de las bisectrices tiene alguna relación con el punto *R*. Fabricio hace la correspondiente construcción. La intervención inmediatamente posterior es de Medardo para proponer que se construya la recta que pasa por la intersección de las bisectrices y por el punto medio del segmento *PQ*, sin embargo, es una propuesta que no realizan en Cabri pues Nancy, Leonardo, el mismo Medardo y Fabricio la desechan con base en la figura que les presenta la calculadora. De nuevo, tratando de sacarle provecho a la idea de Nancy, Medardo pide construir la recta perpendicular a *m* por el punto de intersección de las bisectrices. Fabricio hace la construcción y en la figura que obtiene en la pantalla se ve que el corte de la recta construida con la recta *m* es precisamente el punto *R*. Medardo y Nancy piensan que tienen resuelto el problema; sin embargo, Leonardo y Fabricio ven que no es así y explican por qué esa no puede ser la manera de construir geométricamente el punto *R*. Nancy no queda convencida con la explicación que da Fabricio y los muchachos recurren a Cabri para ilustrar que es cierto lo que dice Fabricio. Después de eso, el grupo descarta la idea de Nancy pasando a considerar una nueva propuesta.

La explicación teórica de la invalidez de la construcción, por usarse en ella el punto que buscan, es de un nivel que Nancy no alcanza a comprender, quedando perpleja ante el rechazo de la propuesta, pues visualmente, en la pantalla, coinciden los puntos correspondientes. Fabricio recurre al uso de Cabri para materializar la idea teórica y así lograr que Nancy comprenda. Como todos consideran que, en esencia, Cabri respeta el sistema axiomático, aceptan como válido lo que resulte al examinar la situación.

Comprobación de conjetura. Después de estudiar las diversas propuestas, Fabricio expone la que será aceptada por el grupo como correcta. Ésta se va formando, tomando elementos de una y otra de las propuestas dadas anteriormente: proyección ortogonal de algún punto, punto de intersección de segmentos especiales, construcción de triángulos. Es así, como el estudiante establece su conjetura:

263	Fabricio:	[10:03] Tengo una idea. [Retoma la calculadora. Previamente ha escondido todas las construcciones auxiliares; sólo se ven el segmento *PQ*, *W*, *X*, *Y*, el punto libre *R* y la recta *m*.] Entonces ya tenemos el punto *X* que es el punto de intersección de *m* y la perpendicular a *m* que pasa por *P*. Y tenemos el punto *Y* que es la intersección entre *m* y la perpendicular a *m* que pasa por *Q*. Entonces, ahora vamos a trazar los segmento *PY* y *QX*. [construye lo anunciado.] Ahora hallamos el punto de intersección de los dos segmentos [marca la intersección de los segmentos recientemente trazados] lo vamos a llamar *C*. Ahora hallamos la perpendicular a *m* por ese punto *C*

En este fragmento es interesante notar la ruta que llevó a la aceptación de esta conjetura, tanto por Fabricio mismo, como por los demás. Inicialmente, Fabricio hace una representación en papel, pero solamente cuando realiza la construcción en Cabri empieza a sentir seguridad de su propuesta. Cada miembro del grupo, usa una de las herramientas de la calculadora para verificar y validar la conjetura; es así como Cabri provee el medio para que cada persona pueda convencerse de la validez de la conjetura. Para unos, basta lo que ven, otros necesitan comprobación empírica, y finalmente, otro necesita ver que no es resultado de la posición específica de los puntos originales, es decir que realmente la conjetura se puede generalizar.

267	Fabricio:	Pues da a ojo.
268	Medardo:	Pues, ensáyelo con medidas, a ver si de pronto.
		…
289	Nancy:	Y de ahí, la perpendicular que pasa por el punto de intersección *C*, pues coincidió con el punto *R* que habíamos encontrado por tanteo.
		…
293	Leonardo:	Variando la medida del segmento *PQ* para ver si se cumplía para todos. Y sí se cumple.

En suma, consideramos que la evidencia presentada en el análisis de los dos episodios de clase apoya la tesis de que Cabri posibilitó en buena medida la participación genuina, autónoma y relevante de los estudiantes en una comunidad de práctica matemática basada en la indagación, al (i) ser fuente de ideas que alimentan el repertorio de conversación, (ii) dar confianza en que lo que puedan decir tiene algún fundamento geométrico, (iii) aportar un medio eficiente para enfocar la atención de los estudiantes en una construcción colectiva.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (1995). Introduction: The coordination of psychological and sociological perspectives in Mathematics Education. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 1-16). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cobb, P., Jaworski, B. y Presmeg, N. (1996). Emergent and sociocultural views of mathematical activity. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 3-19). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Forman, E.A. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: implications of sociocultural theory for educational reform. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 115-130). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*, 4, 258-291.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de Universidad Pedagógica Nacional.

van Oers, B. (1996). Learning mathematics as a meaningful activity. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 3-19). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paidós.